

# Critères de courbure entropique sur les graphes

**Paul-Marie Samson (LAMA, Marne-La-Vallée)**

**Résumé:** Dans la théorie développée par Lott-Sturm-Villani sur la courbure entropique, la propriété de convexité de l'entropie le long des géodésiques de Wasserstein  $W_2$  permet de généraliser à des espaces géodésiques la notion de courbure de Ricci minorée sur les variétés riemanniennes, ou encore les notions de courbure de Bakry-Emery. Ces propriétés de courbures permettent de démontrer de nombreuses inégalités fonctionnelles liées aux vitesses de convergences des processus, aux propriétés de concentration de la mesure.

Cette propriété de convexité de l'entropie peut se formuler sur des structures discrètes, on s'affranchit ainsi de la structure riemannienne pour définir une notion de courbure. Dans cet exposé nous nous intéresserons essentiellement à l'approche proposée par Christian Léonard dans ce cadre où les géodésiques de Wasserstein  $W_2$  sont remplacées par des

ponts de Schrödinger à température nulle. Ces ponts de Schrödinger ont la propriété remarquable d'être des géodésiques de Wasserstein  $W_1$  sur l'espace des probabilités du graphe, portées par les géodésiques discrètes du graphe.

Nous présenterons des critères locaux sur les boules de rayon 2 du graphe sous lesquels des propriétés de convexité de l'entropie sont satisfaites le long de ces ponts de Schrödinger. Ces critères, vus comme des propriétés géométriques des boules de rayon 2, s'interprètent comme des conditions locales de courbure entropique. On montre ainsi que des familles de graphes structurés comme les graphes de Cayley munis de la mesure uniforme ont une courbure entropique positive ou nulle. Les résultats s'appliquent encore lorsqu'on perturbe cette mesure uniforme par un potentiel d'interactions, comme dans le modèle d'Ising sur l'hypercube discret. Comme sur les espaces continus, ces propriétés de courbure induisent des inégalités fonctionnelles sur les graphes en particulier lorsque la courbure est strictement positive (inégalités de Poincaré, de Sobolev logarithmique modifiée), de nouvelles inégalités de type Prékopa-Leindler ou encore de nouvelles

propriétés de concentration de la mesure sur les graphes.

Articles : - Samson, PM. Entropic curvature on graphs along Schrödinger bridges at zero temperature. *Probab. Theory Relat. Fields* 184, 859–937 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00440-022-01167-4>

- Preprint : Rapaport M., Samson PM. (pas encore en ligne)