Cake number et pseudo-cercles

Augustin Fruchard (LMIA)
Travail en collaboration avec Nicolas Chevallier, Dominique Schmitt et Jean-Claude Spehner

Résumé:

Étant donnés deux entiers m,n>0, le cake number c(m,n) est le maximum de parts obtenues en coupant n fois un cake m-dimensionnel, i.e. le nombre maximal de composantes connexes de R^m privé de n hyperplans affines. Il se trouve que c (m, n) est la somme des coefficients binomiaux (n k) pour k allant de 0 à m.
Le cake number apparaît aussi dans la théorie de la VC-dimension, introduite par Vapnik et Chervonenkis. Étant donné un ensemble fini S et une famille F de parties de S, une partie A de S est dite pulvérisée par F si, pour toute partie B de A, il existe T dans F tel que B = T ∩A. Le cardinal maximal d'une partie de A pulvérisée par F est appelé la VC-dimension de F. Le résultat fondamental de cette théorie est le suivant : si F a une VC-dimension au plus d, alors |F| ≤ c(d,|S|). Un exemple de famille atteignant cette borne est la famille de toutes les parties de S de cardinal au plus d.
La géométrie combinatoire permet de faire le lien entre ces deux notions. Étant

donné un ensemble S de n points du plan en position général, il est classique de compter les parties de S qui peuvent être séparées du reste des points par différents types de courbes. Nous verrons que le nombre de parties séparables par des cercles est toujours égal à c(3,n), et que c'est aussi le nombre de parties séparables par des pseudo-cercles convexes, i.e. une famille de courbes de Jordan convexes se coupant deux à deux en au plus deux points.